# Correction Baccalauréat ES Pondichéry
# 17 avril 2012

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **Réponse a.** [En effet, la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse $-2$, donc $g'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-0}{-4-(-2)} = -1,5$.]
2. **Réponse c.** La réponse **a.** est fausse car $g$ est positive juste avant $-2$ et négative juste après $-2$, donc $G$ est croissante puis décroissante et admet donc un maximum (local) en $-2$.

   La réponse **b.** est fausse car $g$ change de signe sur $[-4; 1]$ et donc $G$, dont la dérivée est $g$, change de sens de variation sur cet intervalle. C'est $g$ qui est décroissante sur l'intervalle en question, et non $G$.

   La réponse **c.** est correcte car $g$ est positive sur $[-8; -2]$, donc $G$ y est croissante.
3. **Réponse a.** $I = \displaystyle\int_2^7 \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + x - \ln(x)\right]_2^7 =$
   $(7^2 + 7 - \ln(7)) - (2^2 + 2 - \ln(2))$.
   $I = 50 + \ln(2) - \ln(7) = 50 + \ln\left(\dfrac{2}{7}\right)$.]
4. **Réponse b.** La dérivée de $\ln(u)$ étant $u'/u$, les deux premières fonctions proposées sont des primitives de $f$, tandis que la dernière a pour dérivée $-\dfrac{6x-5}{(3x^2-5x+7)^2} \neq f(x)$. Reste à savoir laquelle de ces deux fonctions a pour image 1 en 1. Or $\ln(3-5+7) = \ln(5)$. Donc c'est la deuxième proposition qui est correcte.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** Voici la représentation graphique du nuage de points (voir plus bas).

   **b.** $\bar{x} = \dfrac{1+2+\ldots+8}{8} = 4,5$ et $\bar{y} = \dfrac{205+252+\ldots+472}{8} = 360,125$.

   Donc $\boxed{\text{G }(4,5\,;\,360).}$

   *Cf.* graphique pour le placement du point G.
2. **a.** À l'aide de la calculatrice, la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ oà[1]

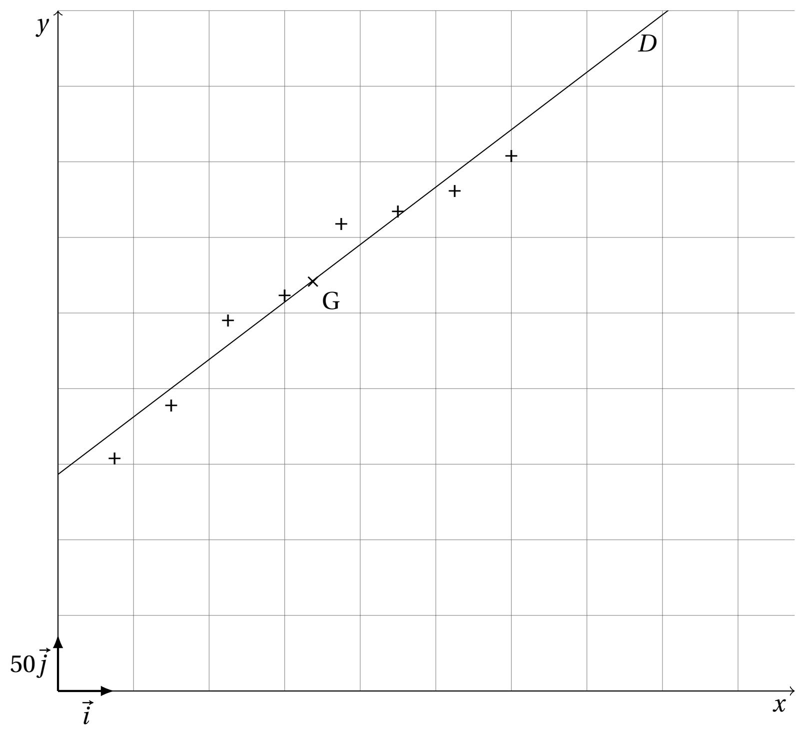
   $\boxed{a \simeq 38 \text{ et } b \simeq 191.}$

   **b.** *Cf.* graphique.

   **c.** $10 \times 38 + 191 = 571$.

   À l'aide de l'ajustement affine effectué, on peut estimer à 571 le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.
3. **a.** Voici le tableau complété.

| Rang de la semaine $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln(x_i)$ | 0 | 0,693 | 1,099 | 1,386 | 1,609 | 1,792 | 1,946 | 2,079 |
| Nombre de visiteurs $y_i$ | 205 | 252 | 327 | 349 | 412 | 423 | 441 | 472 |




**b.** $133\ln(10) + 184 \simeq 490,2$.

Ainsi, à l'aide de ce nouvel ajustement, on peut estimer à 490 le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine.

**c.** Résolvons l'équation $y \geqslant 600$.

$$\begin{array}{rclcrcl} y & \geqslant & 600 & \iff & 133\ln(x) + 184 & \geqslant & 600 \\ & & & \iff & 133\ln(x) & \geqslant & 416 \\ & & & \iff & \ln(x) & \geqslant & \dfrac{416}{133} \\ & & & \iff & x & \geqslant & \mathrm{e}^{\frac{416}{133}}. \end{array}$$

Or $\mathrm{e}^{\frac{416}{133}} \simeq 22,8$.

Donc, selon ce nouveau modèle, il faudra attendre la $23^{\text{e}}$ semaine pour que le nombre de visiteurs dépasse 600.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Non, il n'est pas possible de colorer ce graphe avec seulement trois couleurs. En effet, ce graphe possède un sous-graphe complet d'ordre 4, le sous-graphe relatif aux sommets A, B, C et D. Quatre couleurs au moins sont donc nécessaires à la coloration de ce graphe.
2. Le coefficient situé à la première ligne et dernière colonne de la matrice $M^4$ indique le nombre de chaînes de longueur 4 partant du sommet A et finissant au sommet H (les sommets étant notés dans l'ordre alphabétique dans la matrice $M$ associée au graphe).

   Ainsi, il y a 9 trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en quatre étapes.

**3.** On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la chaîne la plus courte pour aller de A à H.

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | sommet sélectionné |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0_A$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $A(0)$ |
| | $3_A$ | $7_A$ | $11_A$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $B(3)$ |
| | | $6_B$ | $10_B$ | $14_B$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $C(6)$ |
| | | | $10_{(B;C)}$ | $9_C$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $E(9)$ |
| | | | $10_{(B;C)}$ | | $17_E$ | $19_E$ | $\infty$ | $D(10)$ |
| | | | | | $17_E$ | $12_D$ | $\infty$ | $G(12)$ |
| | | | | | $16_G$ | | $24_G$ | $F(16)$ |
| | | | | | | | $23_F$ | $H(23)$ |

Il y a ainsi deux chemins qui minimisent le temps de trajet : il s'agit des chemins ABCDGFH et ABDGFH.

Ces deux trajets durent 23 minutes, ce qui est donc le temps minimal de parcours.

**4.** **a.** Il existe une chaîne passant par tous les sommets, par exemple 12346578, et comme le graphe n'est pas orienté, cela suffit à prouver la connexité du graphe.

**b.** Les sommets 1, 4 et 7 sont d'ordre 2, les sommets 2, 3 et 5 d'ordre 4. Seuls les sommets restants, 6, d'ordre 5, et 8, d'ordre 3, sont de degré impair. Il est donc possible de construire une chaîne eulérienne sur ce graphe, avec comme sommet de départ le n° 8 et sommet d'arrivée le n° 6, ou le contraire.

Il est donc possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule en entrant par le sommet 8.

**EXERCICE 3** **5 points**

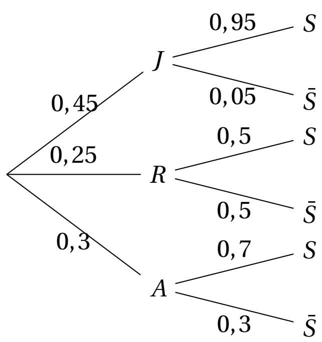
**Commun à tous les candidats**

**1.** **a.** $P(J) = \dfrac{900}{2000}$ soit $\boxed{P(J) = 0,45.}$

$P(R) = \dfrac{500}{2000}$ soit $\boxed{P(R) = 0,25.}$

$P(A) = \dfrac{2000 - 500 - 900}{2000}$ soit $\boxed{P(A) = 0,3.}$

**b.** Voici l'arbre pondéré représentant la situation.




**2.** Calculons $P(J \cap S)$.

$$\begin{aligned} P(J \cap S) &= P(J) \times P_J(S) \\ &= 0,45 \times 0,95 \\ &= 0,4275. \end{aligned}$$

La probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion est 0,4275.

**3.** D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(J\cap S)+P(R\cap S)+P(A\cap S)\\
&= 0,4275+P(R)\times P_R(S)+P(A)\times P_A(S)\\
&= 0,4275+0,25\times 0,5+0,3\times 0,7\\
&= 0,4275+0,125+0,21\\
&= 0,7625.
\end{aligned}$$

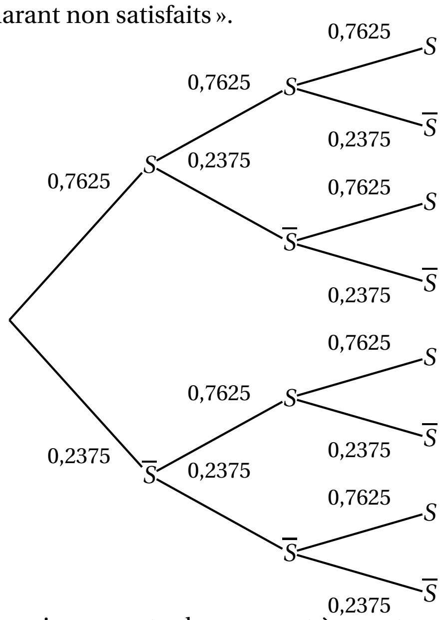
Donc la probabilité que le client se déclare satisfait est bien de 0,7625.

**4.** Calculons $P_S(R)$.

$$\begin{aligned}
P_S(R) &= \frac{P(R\cap S)}{P(S)}\\
&= \frac{0,125}{0,7625}\\
&\simeq 0,1639.
\end{aligned}$$

La probabilité que le client choisi ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois sachant qu'il se déclare satisfait du service est d'environ 0,16.

**5.** Construisons l'arbre pondéré représentant cette situation, dont la loi de probabilité suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,7625, dont les échecs sont « les clients se déclarant non satisfaits ».




Ainsi, il y a trois chemins sur cet arbre menant à exactement un échec. Chacun de ces chemins a une probabilité d'être suivi égale à $0,7625^2\times 0,2375\simeq 0,138084$.

$3\times 0,138084\simeq 0,41$.

La probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fournie est donc d'environ 0,41.

**EXERCICE 4** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

**1.** **a.** La fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8x\mathrm{e}^{-x} + \left(-4x^2+5\right)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \left(-8x - \left(-4x^2+5\right)\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(4x^2-8x-5\right)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \left(4x^2-8x-5\right)\mathrm{e}^{-x}, \quad \forall x \in [0\,;\,+\infty[.$$

**b.** La fonction exponentielle étant toujours positive, $f'$ est du signe de $4x^2-8x-5$.
Cherchons à résoudre $4x^2-8x-5=0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-8)^2 - 4\times 4\times(-5) \\ &= 144 > 0 \text{ donc il y a deux solutions réelles à cette équation.} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc : $\begin{aligned} x_1 &= \dfrac{8-12}{2\times 4} & \text{et} \quad x_2 &= \dfrac{8+12}{2\times 4} \\ x_1 &= -0,5 & \text{et} \quad x_2 &= 2,5. \end{aligned}$ Puisque $x \longmapsto 4x^2-8x-5$ est représentée par une parabole convexe (son coefficient dominant est positif), on a le tableau de signe suivant pour $f'$.

| $x$ | $0$ | | $2,5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2.** **a.** Soit $x \in [0\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-4x^2+5)\mathrm{e}^{-x}+3 \\ &= \frac{-4x^2+5}{\mathrm{e}^x}+3 \\ &= -\frac{4x^2}{\mathrm{e}^x}+\frac{5}{\mathrm{e}^x}+3. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \geqslant 0$,

$$f(x) = -\frac{4x^2}{\mathrm{e}^x}+\frac{5}{\mathrm{e}^x}+3.$$

**b.** Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-\frac{4x^2}{\mathrm{e}^x}=0$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\mathrm{e}^x}=0$.
Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

**c.** De la limite précédente, on peut déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=3$ en $+\infty$.

**3.** Des questions précédentes, on peut déduire le tableau de variation de la fonction $f$.

| $x$ | $0$ | $2,5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $8$ $\searrow$ | $f(2,5)$ | $\nearrow$ $3$ |

4. On peut ici résoudre algébriquement l'équation.
   $f(x) = 3 \iff (-4x^2+5)\mathrm{e}^{-x}+3 = 3 \iff (-4x^2+5)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff -4x^2+5 = 0 \iff 4x^2 = 5 \iff x^2 = 1,25 = \dfrac{5}{4}$.
   $f(x) = 3 \iff x = \sqrt{1,25}$ ou $x = -\sqrt{1,25}$ et une seule de ces solutions est positive
   On a donc
   $$x_0 = \sqrt{1,25} \simeq 1,12.$$

**Partie B**

1. $f(5) = 3 - 95\mathrm{e}^{-5} \simeq 2,36$.
   Ainsi, le coût moyen unitaire de production, pour une production de 500 litres, est d'environ 236 €.
2. **a.** D'après la partie A, $f$ atteint son minimum pour $x = 2,5$ et le minimum global de $f$ sur $[0~;~+\infty[$ est $f(2,5) \simeq 1,36$. A fortiori, ce minimum est le minimum de $f$ sur $[0,5~;~8]$.
   Donc l'entreprise doit produire 250 litres de peinture pour minimiser le coût moyen unitaire de production, et le coût minimal est d'environ 136 €.
   **b.** Non, l'entreprise ne peut réaliser de bénéfice puisque la production d'un hectolitre lui coûte 136 € dans le meilleur des cas, d'après la question précédente, tandis que la vente d'un hectolitre ne lui rapporte que 100 €. Elle vend donc à perte dans tous les cas.
3. Le seuil de rentabilité de l'entreprise est la valeur à partir de laquelle le prix moyen unitaire de production d'un hectolitre est inférieur à 300 €. Cela revient donc à chercher la plus petite valeur de $x$ telle que $f(x) = 3$. Or on a vu dans la partie A que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $x_0$.
   Le seuil de rentabilité pour cette entreprise est donc $x_0$ hectolitres, soit environ 112 L.